

Marcelina Mocanu
Elena Roxana Ardeleanu

Ecuatii
cu derivate parțiale



EDITURA „ALMA MATER”
BACĂU, 2025

REFERENȚI ȘTIINȚIFICI

Conf. univ. dr. Carmen Violeta POPESCU
Universitatea „Vasile Alecsandri” din Bacău

Lector univ. dr. Otilia LUNGU
Universitatea „Vasile Alecsandri” din Bacău

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

MOCANU, MARCELINA

Ecuatii cu derivate parțiale / Marcelina Mocanu, Elena Roxana
Ardeleanu. - Bacău : Alma Mater, 2025

Conține bibliografie

ISBN 978-606-527-739-7

I. Ardeleanu, Elena Roxana

Copyright © 2025, Editura „Alma Mater” Bacău

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii

Str. Spiru Haret, nr. 8, 600114, Bacău, România

Tel.: +40-234-542-411 int. 638

Tel./Fax: +40-234-545-753

<https://editura-almamater.ub.ro/>

E-mail: almamater@ub.ro

E-mail: edituraalmamater@gmail.com

Cuprins

1	Introducere in teoria ecuațiilor cu derivate parțiale	1
1.1	Noțiunea de ecuație cu derivate parțiale (EDP)	1
1.2	Scurt istoric	4
1.3	Modele matematice guvernate de EDP	6
1.3.1	Elemente de teoria câmpurilor	7
1.3.2	Ecuații ale proceselor oscilatorii	10
1.3.3	Ecuația propagării căldurii	17
1.3.4	Ecuația proceselor staționare	19
1.3.5	Ecuațiile lui Maxwell	19
1.3.6	Model de reacție-difuzie într-un mediu 3D neomogen stratificat	21
2	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul I	25
2.1	Sisteme diferențiale autonome de ordinul I	25
2.1.1	Forme ale soluțiilor	25
2.1.2	Forma simetrică a unui sistem diferențial autonom de ordinul I	28
2.1.3	Metode de determinare a integralelor prime ale unui sistem autonom	29
2.1.4	Probleme care conduc la sisteme autonome de ordinul I	33
2.2	Clasificări ale EDP de ordinul I	38
2.3	Construcția unei EDP de ordinul I	40
2.4	Algoritm de rezolvare a unei EDP de ordinul I	42
2.5	Metoda curbelor caracteristice pentru o EDP liniară cu două variabile	46

3	EDP de ordinul al doilea cvasiliniare	51
3.1	Definiții și exemple	51
3.2	Forme canonice ale EDP II cvasiliniare. Clasificare	52
3.3	Schimbări de variabile în EDP II cvasiliniare	54
3.3.1	Noțiunea de schimbare de variabile	54
3.3.2	Aplicarea unei schimbări de variabile în EDP II cvasiliniară	55
3.3.3	Aducerea EDP II cvasiliniare la forma canonică într-un punct	58
3.4	Clasificarea EDP II cvasiliniare	59
3.5	EDP II cvasiliniare cu două variabile independente	62
3.5.1	Introducere	62
3.5.2	Determinarea tipului EDP II cvasiliniare	63
3.5.3	Formulele de transformare pentru derivatele funcției necunoscute de două variabile	66
3.5.4	Laplacianul în coordonate polare	68
3.6	Metoda curbelor caracteristice	71
3.7	EDP de ordinul II liniare cu coeficienți constanți	78
3.7.1	Metoda curbelor caracteristice	79
3.7.2	Ecuatii de tip hiperbolic	80
3.7.3	Ecuatii de tip parabolic	82
3.7.4	Ecuatii de tip eliptic	84
3.7.5	Concluzii, exemple	85
3.8	Rezolvarea unor EDP II liniare cu coeficienți constanți folosind EDP I cvasiliniare	91
3.9	Metoda separării variabilelor	93
4	Ecuatii de tip hiperbolic	103
4.1	Ecuatia coardei vibrante	103
4.2	Vibrațiile coardei nelimitate	104
4.2.1	Vibrațiile libere ale unei coarde nelimitate	104
4.2.2	Vibrațiile forțate ale unei coarde nelimitate. Metoda lui Duhamel	115
4.3	Vibrațiile coardei fixate la capete	119
4.3.1	Vibrațiile libere ale coardei fixate la capete	119
4.3.2	Vibrațiile forțate ale coardei fixate la capete	132

5	Ecuatii de tip parabolic	139
5.1	Ecuatia propagării căldurii în cazul tridimensional	139
5.2	Problema Cauchy pentru propagarea căldurii într-o bară nelimitată	140
5.2.1	Rezolvarea problemei Cauchy	141
5.2.2	Reprezentarea integrală a soluției	144
5.2.3	Mărginirea soluției problemei Cauchy	145
5.3	Soluția fundamentală pentru cazul unidimensional	147
5.3.1	Proprietăți ale soluției fundamentale	148
5.3.2	Soluția problemei Cauchy obținută prin convoluție	152
5.4	Ecuatia propagării căldurii- cazul 3D	155
5.4.1	Soluția fundamentală- cazul 3D	155
5.4.2	Proprietăți ale soluției fundamentale 3D	155
5.4.3	Soluția problemei Cauchy în cazul tridimensional	159
5.5	Problema Cauchy- cazul neomogen 3D	161
5.5.1	Formularea problemei	161
5.5.2	Metoda lui Duhamel (Metoda impulsurilor)	161
6	Ecuatii de tip eliptic	165
6.1	Ecuatia lui Laplace și ecuația lui Poisson	165
6.2	Soluții fundamentale ale ecuației lui Laplace	166
6.3	Valori extreme ale soluțiilor ecuației Poisson	168
6.4	Extremele funcțiilor armonice de trei variabile	170
6.4.1	Principiul slab al extremelor pentru funcții armonice	170
6.4.2	Proprietăți ale funcțiilor armonice	173
6.5	Funcții armonice de trei variabile	174
6.5.1	Formulele lui Green	174
6.5.2	Formula celor trei potențiale	175
6.5.3	Teorema de medie și principiul tare al extremelor	180
6.6	Problemele Dirichlet și Neumann pentru funcții de trei variabile	183
6.6.1	Formularea problemelor. Unicitatea soluției	183
6.6.2	Problemele Dirichlet și Neumann. Teoreme de existență a soluției	187
6.6.3	Reducerea problemelor la limită la cazul cu date pe frontieră fixate	188
6.6.4	Problema Dirichlet. Funcția Green a unui domeniu	189

6.6.5	Problema Neumann	190
6.6.6	Funcția lui Green a unei bile. Soluția problemei Dirichlet pentru bilă	191
6.6.7	Soluția problemei Dirichlet pentru bilă. Formula lui Poisson	196
6.7	Funcții armonice de două variabile	198
6.7.1	Formulele lui Green în plan	200
6.7.2	Formula celor trei potențiale în plan	202
6.7.3	Proprietăți ale funcțiilor armonice de două variabile . . .	204
6.7.4	Probleme la limită pentru ecuația lui Laplace în plan . .	209
6.7.5	Funcția lui Green pentru problema Dirichlet în plan . . .	210
6.7.6	Soluția problemei Dirichlet pentru disc	212
7	Anexe	217
7.1	Extreme ale funcțiilor reale	217
7.2	Forme pătratice. Aducerea la o formă canonică	220
7.2.1	Metoda valorilor și vectorilor proprii	221
7.2.2	Cazul bidimensional	222
7.3	Transformarea Fourier	223
7.4	Condiții suficiente pentru derivarea integralelor cu parametru . .	225
7.5	Corectitudinea formulării problemelor pentru ecuațiile fizicii matematice	227