

**Marcelina Mocanu**

**ANALIZĂ COMPLEXĂ**

**Editura ALMA MATER**

**Universitatea „Vasile Alecsandri” din Bacău**

**2011**

## Cuprins

<b>1</b>	<b>Mulțimea numerelor complexe</b>	<b>1</b>
1.1	<b>Corpul numerelor complexe</b>	1
1.1.1	Forma algebrică a numerelor complexe	2
1.1.2	Asupra relațiilor de ordine pe mulțimea numerelor complexe	4
1.2	<b>Reprezentarea geometrică a numerelor complexe</b>	5
1.2.1	Interpretări geometrice ale operațiilor cu numere complexe	6
1.2.2	Distanța dintre două numere complexe	7
1.3	<b>Spațiul normat <math>(\mathbb{C},  \cdot )</math>. Spațiul metric <math>(\mathbb{C}, d)</math></b>	8
1.3.1	Noțiunile de spațiu normat și spațiu metric	8
1.3.2	Funcția modul pe mulțimea numerelor complexe	8
1.3.3	Mulțimi remarcabile în planul complex	10
1.4	<b>Numere complexe sub formă trigonometrică</b>	13
1.4.1	Noțiunea de formă trigonometrică a unui număr complex	13
1.4.2	Trecerea de la forma algebrică la forma trigonometrică	15
1.4.3	Operații cu numere complexe sub forma trigonometrică	17
<b>2</b>	<b>Structura topologică a planului complex</b>	<b>23</b>
2.1	<b>Șiruri de numere complexe</b>	23
2.1.1	Noțiunea de șir convergent	23
2.1.2	Proprietăți ale șirurilor convergente	24
2.1.3	Caracterizări ale șirurilor convergente de numere complexe	26
2.2	<b>Noțiuni de topologie generală. Topologia planului complex</b>	33
2.2.1	Spațiu topologic. Mulțimi deschise, mulțimi închise, vecinătăți	33
2.2.2	Topologia unui spațiu metric	34
2.2.3	Topologia uzuală a mulțimii numerelor complexe	37
2.2.4	Urma unei topologii pe o mulțime	38
2.2.5	Poziția unui punct relativ la o mulțime într-un spațiu topologic	39
2.2.6	Funcții continue. Homeomorfisme	43
2.3	<b>Planul complex extins</b>	46
2.3.1	Structura topologică a planului complex extins	46
2.3.2	Limite de șiruri. Operații algebrice în $\overline{\mathbb{C}}$	47
2.3.3	Interpretarea geometrică a punctului de la infinit. Proiecția stereografică	48
2.4	<b>Mulțimi conexe</b>	50
2.4.1	Spațiu topologic conex. Definiție, caracterizări, exemple	50
2.4.2	Proprietăți ale mulțimilor conexe	51

2.4.3	Componente conexe . . . . .	53
2.4.4	Mulțimi conexe prin arce . . . . .	54
2.4.5	Noțiunea de domeniu . . . . .	56
2.4.6	Domeniu simplu conex . . . . .	57
2.5	<b>Mulțimi compacte</b> . . . . .	58
2.5.1	Noțiunea de mulțime compactă. Definiție, proprietăți . . . . .	59
2.5.2	Condiții necesare și condiții suficiente de compactitate . . . . .	60
2.5.3	Distanța dintre o mulțime compactă și o mulțime închisă . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Funcții complexe derivabile</b>	<b>67</b>
3.1	<b>Funcții complexe de o variabilă reală</b> . . . . .	68
3.1.1	Limite și continuitate . . . . .	68
3.1.2	Derivabilitate . . . . .	69
3.1.3	Integrabilitate . . . . .	71
3.1.4	Drumuri în planul complex . . . . .	72
3.2	<b>Funcții complexe de o variabilă complexă. Limite și continuitate</b>	83
3.2.1	Introducere . . . . .	83
3.2.2	Funcții elementare. Exemple . . . . .	85
3.2.3	Limite pentru funcții complexe de o variabilă complexă . . . . .	99
3.2.4	Continuitatea unei funcții complexe de o variabilă complexă . . . . .	100
3.3	<b>Derivabilitatea funcțiilor de o variabilă complexă</b> . . . . .	102
3.3.1	$\mathbb{C}$ -derivabilitate. Operații cu funcții derivabile . . . . .	102
3.3.2	$\mathbb{C}$ -diferențiabilitate. Teorema Cauchy-Riemann . . . . .	104
3.3.3	Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții complexe de variabilă complexă . . . . .	110
3.4	<b>Funcții olomorfe</b> . . . . .	112
3.4.1	Noțiunea de funcție olomorfă. Aplicații imediate ale teoremei Cauchy-Riemann . . . . .	112
3.4.2	Condiții ca o funcție olomorfă pe un domeniu să fie constantă . . . . .	114
3.4.3	Legătura dintre funcțiile olomorfe și funcțiile armonice . . . . .	116
3.4.4	Inversarea funcțiilor olomorfe și bijective . . . . .	120
3.5	<b>Aplicații multivoce</b> . . . . .	123
3.5.1	Definiții. Exemple . . . . .	123
3.5.2	Aplicația argument. Funcția argument redus . . . . .	124
3.5.3	Aplicația radical de ordinul $n$ . . . . .	125
3.5.4	Aplicația logaritm natural . . . . .	126
3.5.5	Aplicația putere cu exponent complex . . . . .	128
3.5.6	Teorema ramurilor uniforme . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Integrarea funcțiilor complexe de o variabilă complexă</b>	<b>135</b>
4.1	<b>Integrala curbilinie a unei funcții complexe de o variabilă complexă</b> . . . . .	136
4.1.1	Condiție suficientă de integrabilitate . . . . .	136
4.1.2	Trecerea la limită sub semnul integralei curbilinie complexe . . . . .	148
4.2	<b>Aplicații ale formulei Leibniz-Newton</b> . . . . .	152

4.2.1	Formula Leibniz-Newton pentru funcții complexe de o variabilă complexă . . . . .	152
4.2.2	Condiții echivalente pentru ca o funcție continuă pe un domeniu să admită primitive . . . . .	154
4.3	<b>Teorema fundamentală a lui Cauchy</b> . . . . .	158
4.3.1	Teorema lui Cauchy pentru domeniu simplu conex . . . . .	158
4.3.2	Teorema lui Cauchy pentru domeniu multiplu conex . . . . .	163
4.3.3	Demonstrația Teoremei lui Cauchy pe un domeniu simplu conex fără ipoteza suplimentară a continuității derivatei . . . . .	168
4.3.4	Versiunea omotopică a teoremei fundamentale a lui Cauchy . . . . .	170
4.4	<b>Formulele lui Cauchy de reprezentare integrală</b> . . . . .	175
4.4.1	Formula lui Cauchy de reprezentare integrală. Cazul domeniului simplu conex . . . . .	176
4.4.2	Formula lui Cauchy de reprezentare integrală. Cazul domeniului multiplu conex . . . . .	177
4.4.3	Studiul integralei de tip Cauchy . . . . .	178
4.4.4	Formulele lui Cauchy de reprezentare integrală pentru derivate . . . . .	185
4.5	<b>Consecințe ale formulelor lui Cauchy</b> . . . . .	186
4.5.1	Derivabilitatea indefinită a funcțiilor olomorfe . . . . .	186
4.5.2	Condiții pentru ca o funcție olomorfă să admită primitive . . . . .	187
4.5.3	Formula de medie pentru funcții olomorfe pe disc . . . . .	187
4.5.4	Inegalitățile lui Cauchy . . . . .	188
4.5.5	Teorema lui Liouville. Aplicație-teorema fundamentală a algebrei . . . . .	188
4.5.6	Integrale improprii. Formula semireziduului . . . . .	190
5	<b>Șiruri și serii de funcții complexe</b> . . . . .	193
5.1	<b>Șiruri și serii convergente de funcții</b> . . . . .	193
5.1.1	Definiții . . . . .	193
5.1.2	Proprietăți ale șirurilor uniform convergente de funcții complexe . . . . .	196
5.1.3	Proprietăți ale seriilor uniform convergente de funcții complexe . . . . .	200
5.2	<b>Serii tayloriene</b> . . . . .	201
5.2.1	Mulțimea de convergență a unei serii tayloriene . . . . .	201
5.2.2	Suma unei serii tayloriene. Teorema identității coeficienților . . . . .	206
5.3	<b>Analiticitatea funcțiilor olomorfe</b> . . . . .	210
5.3.1	Teorema de dezvoltare în serie Taylor . . . . .	210
5.3.2	Funcții complexe analitice . . . . .	216
5.4	<b>Principiul identității funcțiilor olomorfe pe un domeniu. Aplicații</b> . . . . .	217
5.4.1	Proprietăți ale mulțimii zerourilor unei funcții olomorfe . . . . .	217
5.4.2	Principiul identității funcțiilor olomorfe pe un domeniu . . . . .	223
5.4.3	Consecințe ale principiului identității funcțiilor olomorfe pe un domeniu . . . . .	227
5.5	<b>Serii Laurent</b> . . . . .	235
5.5.1	Definiții. Exemple . . . . .	235
5.5.2	Studiul convergenței seriilor Laurent . . . . .	237

5.5.3	Serii Laurent și funcții olomorfe pe coroane circulare . . . . .	240
<b>6</b>	<b>Aplicații ale teoriei reziduurilor</b>	<b>245</b>
6.1	<b>Puncte singulare izolate</b> . . . . .	245
6.1.1	Definiții, clasificare, exemple. Legătura cu seriile Laurent . . .	245
6.1.2	Teoreme de caracterizare pentru puncte singulare izolate . . .	247
6.1.3	Comportarea la infinit a unei funcții olomorfe . . . . .	251
6.1.4	Funcții meromorfe . . . . .	252
6.2	<b>Noțiunea de reziduu al unei funcții olomorfe într-un punct singular izolat</b> . . . . .	255
6.2.1	Definiție, exemple . . . . .	255
6.2.2	Formule de calcul pentru reziduuri . . . . .	256
6.3	<b>Teorema reziduurilor și aplicații</b> . . . . .	258
6.3.1	Teorema reziduurilor . . . . .	258
6.3.2	Teorema semireziduurilor . . . . .	264
6.3.3	Aplicații ale teoremei reziduurilor și teoremei semireziduurilor	266
6.4	<b>Principiul variației argumentului</b> . . . . .	293
6.4.1	Indexul unui drum față de un punct . . . . .	293
6.4.2	Formulele lui Cauchy și teorema reziduurilor pentru drumuri omotope cu zero . . . . .	301
6.4.3	Variația argumentului unei funcții complexe de-a lungul unui drum . . . . .	304
6.4.4	Aplicații ale principiului variației argumentului . . . . .	308
6.4.5	Teorema de invarianță a domeniului. Teorema de inversare locală	313
<b>7</b>	<b>Reprezentări conforme</b>	<b>317</b>
7.1	<b>Funcții univalente</b> . . . . .	317
7.1.1	Definiție, exemple. Condiția de univalență locală . . . . .	317
7.1.2	Șiruri de funcții univalente . . . . .	319
7.2	<b>Proprietăți ale reprezentărilor conforme</b> . . . . .	321
7.2.1	Proprietăți geometrice ale reprezentărilor conforme . . . . .	322
7.2.2	Inversa unei reprezentări conforme . . . . .	325
7.2.3	Grupul conform al unui domeniu . . . . .	325
7.2.4	Invarianța conformă a armonicității . . . . .	328
7.3	Problema reprezentării conforme. Teorema lui Riemann . . . . .	328
<b>A</b>	<b>Exerciții și probleme propuse</b>	<b>335</b>
A.1	Noțiuni introductive . . . . .	335
A.2	Funcții complexe de variabilă reală . . . . .	335
A.3	Funcții olomorfe . . . . .	336
A.4	Teorema lui Cauchy. Formulele de reprezentare integrală Cauchy . . .	337
A.5	Serii Taylor și Laurent. Puncte singulare izolate . . . . .	338
A.6	Calculul integralelor cu ajutorul teoremei reziduurilor . . . . .	339
A.7	Aplicații ale analiticității funcțiilor olomorfe . . . . .	339