

# **UNIVERSITATEA DIN BACĂU FACULTATEA DE INGINERIE**

## **ANALIZĂ STRUCTURALĂ PRIN METODA ELEMENTULUI FINIT**

**Note de curs și  
aplicații de laborator  
- pentru uzul studenților -**

**S.L. Drd. Ing Adrian JUDELE  
Prof. Dr. Ing. Valentin ZICHIL**

**2007**

|  |     |
|--|-----|
| 1. PRINCIPIILE ȘI TEOREMELE VARIAȚIONALE ALE MECANICII SOLIDULUI DEFORMABIL .....  | 3   |
| 1.1. Principiul deplasărilor virtuale.....   | 3   |
| 1.2. Teorema de minim a energiei potențiale totale .....   | 8   |
| 1.3. Principiul lucrului mecanic complementar virtual .....  | 9   |
| 2. NOȚIUNI DE CALCUL VARIAȚIONAL .....   | 12  |
| 2.1. Probleme de extrem cu legături. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange .....   | 12  |
| 2.2. Noțiunea de funcțională. Valori staționare ale funcționalelor .....   | 15  |
| 2.3. Ecuația lui Euler. Lema fundamentală a calculului variațional .....   | 19  |
| 2.4. Notăția variațională.....   | 21  |
| 2.5. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange aplicată în cazul funcționalelor.....   | 22  |
| 2.6. Principii energetice. Metode variaționale .....   | 24  |
| 2.6.1. Teorema de minim a energiei potențiale .....  | 24  |
| 2.6.2. Metoda Ritz .....   | 25  |
| 3. PREZENTAREA GENERALĂ A PRINCIPALELOR METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN INGINERIE .....   | 26  |
| 3.1. Metoda diferențelor finite .....  | 27  |
| 3.2. Metoda elementelor finite .....   | 28  |
| 3.3. Metoda elementelor de frontieră.....  | 29  |
| 4. TIPURI DE ELEMENTE FINITE.....  | 31  |
| 4.1. Descrierea generală a celor mai uzuale tipuri de elemente finite.....   | 31  |
| 4.2. Elemente finite unidimensionale.....  | 32  |
| 4.3. Elemente finite bidimensionale.....   | 32  |
| 4.4. Elemente finite tridimensionale .....   | 34  |
| 5. CONSTRUCȚIA FUNCȚIILOR DE APROXIMARE ASOCIATE ELEMENTELOR FINITE .....  | 35  |
| 5.1. Elementul triunghiular liniar .....   | 36  |
| 5.2. Elementul patrulater biliniar .....   | 42  |
| 5.3. Elementul tetraedric liniar.....  | 45  |
| 5.4. Elementul hexaedric triliniar.....  | 50  |
| 6. APROXIMAREA DE TIP ELEMENT FINIT A MARIMILOR VECTORIALE .....   | 55  |
| 7. EXPANDAREA APROXIMANTELOR ELEMENTALE ÎN VEDEREA ASAMBLĂRII LOR ÎNTR-O APROXIMANTĂ GLOBALĂ.....  | 57  |
| 7.1. Expandarea aproximantelor elementale ale mărimilor scalare .....  | 58  |
| 7.2. Expandarea aproximantelor elementale ale mărimilor vectoriale.....  | 60  |
| 8. MODELUL CU ELEMENTE FINITE AL PROBLEMELOR DE ELASTICITATE .....   | 62  |
| 8.1. Sistemul de ecuații cu derivate parțiale.....   | 62  |
| 8.2. Utilizarea teoremei de minim a energiei potențiale elastice pentru construirea modelului cu elemente finite al problemelor de elasticitate..... | 67  |
| 8.3. Probleme bidimensionale de elasticitate .....   | 81  |
| 8.3.1. Probleme de stare plană de tensiuni .....   | 82  |
| 8.3.2. Probleme de stare plană de deformații .....   | 85  |
| 8.3.3. Probleme cu simetrie axială.....  | 88  |
| 9. APLICAȚII .....   | 91  |
| 9.1. Tensiuni și deformații în secțiunile transversale ale barelor .....   | 91  |
| 9.2. Tensiuni și deformații în secțiunile transversale ale plăcilor.....   | 107 |
| 9.3. Tensiuni și deformații în secțiunile transversale ale blocurilor .....  | 118 |
| 9.4. Aplicații pentru laborator utilizând programul de analiză COSMOS/M .....  | 125 |
| BIBLIOGRAFIE .....   | 379 |